(**) PROBLEME DE CYCLAGE : EXEMPLE DE BEALE

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad z = 3/4\, x_1 - 150x_2 + 1/50\, x_3 - 6x_4 \\ \text{avec} \quad 1/4\, x_1 - 60x_2 - 1/25\, x_3 + 9x_4 \leqslant 0 \\ \phantom{\text{avec}} \quad 1/2\, x_1 - 90x_2 - 1/50\, x_3 + 3x_4 \leqslant 0 \\ \phantom{\text{avec}} \quad x_3 \leqslant 1 \\ \phantom{\text{avec}} \quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la méthode du simplexe conduit à un cyclage, lorsqu'en cas d'égalité pour le 2e critère de Dantzig, on fait sortir de la base la variable dont la ligne est la plus haute dans le tableau.
2. Utiliser la règle de Bland pour trouver une solution optimale.
3. Que se passe-t-il si l'on change le signe du profit de la variable x_2 dans la fonction économique ?

CORRIGÉ

1. Pour simplifier la présentation, nous ne ferons pas apparaître dans les différents tableaux du simplexe la première colonne des coefficients, dans la fonction économique, des variables de base, ni la ligne des coefficients de cette fonction.

Les différents tableaux du simplexe sont les suivants :

	i	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	u	
s ←	$\bar{1}$	$\boxed{1/4}$	-60	-1/25	9	1	0	0	0	
	$\bar{2}$	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0	0	
	$\bar{3}$	0	0	1	0	0	0	1	1	
	Δ_j	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	0	- z
		↑ e								

	i	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	u
	1	1	-240	-4/25	36	4	0	0	0
s ←	$\bar{2}$	0	$\boxed{30}$	3/50	-15	-2	1	0	0
	$\bar{3}$	0	0	1	0	0	0	1	1
	Δ_j	0	30	7/50	-33	-3	0	0	0
			↑ e						

	i	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	u	
s ←	1	1	0	$\boxed{8/25}$	-84	-12	8	0	0	
	2	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0	0	
	$\bar{3}$	0	0	1	0	0	0	1	1	
	Δ_j	0	0	2/25	-18	-1	-1	0	0	- z
				↑ e						

	i	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	u	
	3	25/8	0	1	-525/2	-75/2	25	0	0	
s ←	2	-1/160	1	0	$\boxed{1/40}$	1/120	-1/60	0	0	
	$\bar{3}$	-25/8	0	0	525/2	75/2	-25	1	1	
	Δ_j	-1/4	0	0	3	2	-3	0	0	- z
					↑ e					

	i	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	u	
s ←	3	-125/2	10500	1	0	$\boxed{50}$	-150	0	0	
	4	-1/4	40	0	1	1/3	-2/3	0	0	
	$\bar{3}$	125/2	-10500	0	0	-50	150	1	1	
	Δ_j	1/2	-120	0	0	1	-1	0	0	- z
						↑ e				

	i	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	u	
	$\bar{1}$	-5/4	210	1/50	0	1	-3	0	0	
s ←	4	1/6	-30	-1/150	1	0	$\boxed{1/3}$	0	0	
	3	0	0	1	0	0	0	1	1	
	Δ_j	7/4	-330	-1/50	0	0	2	0	0	- z
							↑ e			

i	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	u	
$\bar{1}$	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0	0	
$\bar{2}$	1/2	-90	-1/90	3	0	1	0	0	
$\bar{3}$	0	0	1	0	0	0	1	1	
Δ_j	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0	0	- z