Notes d'exercices Programmation Linéaire Avancée
2004-2005

$$\begin{array}{rrcll} \max & f_i(x_1,x_2) & = & c_1x_1+c_2x_2 & \\ & 2x_1+2x_2 & \geq & 3 & (1) \\ & 2x_1-2x_2 & \leq & 3 & (2) \\ & -x_1+x_2 & \leq & 2 & (3) \\ & x_1,\ x_2 & \geq & 0 & (4),(5) \end{array}$$

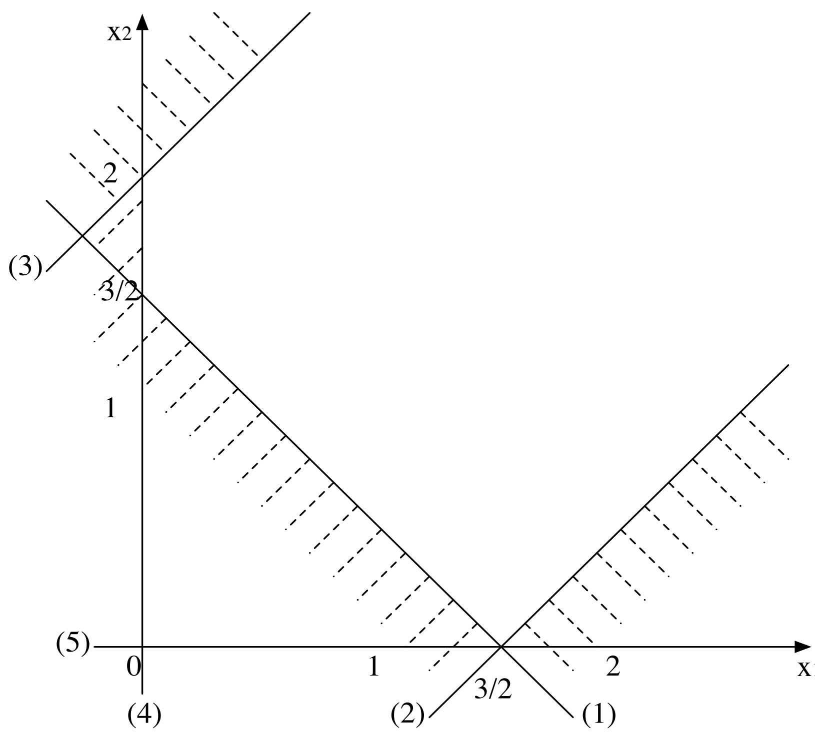

Figure 1 : *polytope des solutions réalisables*

sous forme standard :

$$\begin{array}{rcl} 2x_1+2x_2-x_3 & = & 3 \\ 2x_1-2x_2+x_4 & = & 3 \end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
-x_1+x_2+x_5 & = & 2\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour rang 3. Les bases sont donc de dimension 3 et il y au plus $\binom{5}{3} = 10$ bases.

B_{123} : n'est pas une base car $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$B_{124} : x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{7}{4}, x_3 = 0, x_4 = 7, x_5 = 0$ est une base non réalisable

$B_{125} : x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{1}{2}$ est une base réalisable

$B_{134} : x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = -7, x_4 = 7, x_5 = 0$ est une base non réalisable

$B_{135} : x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{7}{2}$ est une base réalisable

$B_{145} : x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{7}{2}$ est une base réalisable

$B_{234} : x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 7, x_5 = 0$ est une base réalisable

$B_{235} : x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}, x_3 = -6, x_4 = 0, x_5 = \frac{7}{2}$ est une base non réalisable

$B_{245} : x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 0, x_4 = 6, x_5 = \frac{1}{2}$ est une base réalisable

$B_{345} : x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -3, x_4 = 3, x_5 = 2$ est une base non réalisable

Il y a 9 bases dont 5 sont réalisables. Le polytope a donc au plus 5 sommets.

Les bases $B_{125}, B_{135}, B_{145}$ correspondent à une même solution. Cette solution est réalisable, elle correspond au sommet de coordonnées $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0$. Ces 3 bases sont adjacentes. Les deux autres bases réalisables B_{234} et B_{345} correspondondent à deux solutions distinctes. Le polytope a 3 sommets.

La base B_{245} n'est pas adjacente à B_{135} alors que les sommets correspondant le sont dans le polytope.

Soit la matrice de base $B_{145} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec pour inverse $B_{145}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on obtient $B_{145}^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B_{145}^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ soit le

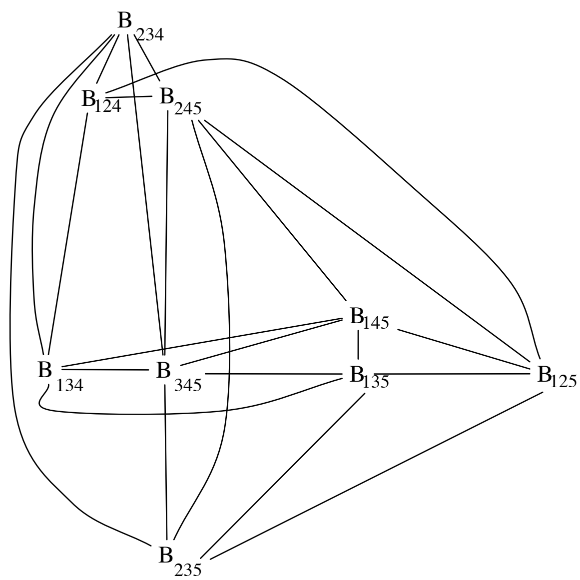

Figure 2 : *adjacence des bases*

système suivant :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \\ -4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_5 &= \frac{7}{2} \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pour $f_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$ dans B_{145} on a $f_1 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3$ et on peut conclure que $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{7}{2}$ est une solution optimale.

Pour $f_2(x_1, x_2) = -x_1$ on a $f_2 = -\frac{3}{2} + x_2 - \frac{1}{2}x_3$. Le coefficient de x_2 est strictement positif on doit effectuer un changement de base. x_3 restant nul, le système d'équations s'écrit :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - x_2 \\ x_4 &= 4x_2 \\ x_5 &= \frac{7}{2} - 2x_2 \end{aligned}$$

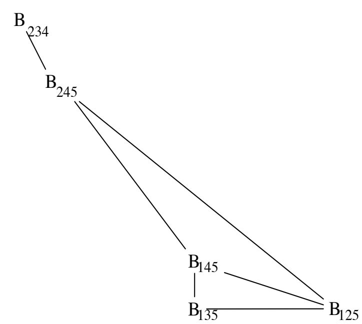

Figure 3 : *adjacence des bases réalisables*

On cherche alors la plus grande valeur de x_2 telle que $x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$. On obtient $x_2 = \frac{3}{2}$. Ainsi on a la solution $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = 0, x_4 = 6, x_5 = \frac{1}{2}$ qui correspond à la base B_{245}. Le système correspondant est :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \\ 4x_1 - x_3 + x_4 &= 6 \\ -2x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_5 &= \frac{1}{2} \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

et on a $f_2 = -x_1$. Cette solution est optimale. Le coefficient de x_3 est nul donc la base B_{245} n'est pas l'unique base optimale. La base B_{234} est une autre base optimale. Le système correspondant est :

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_5 &= 2 \\ x_4 + 2x_5 &= 7 \\ -4x_1 + x_3 + 2x_5 &= 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Toutes les solutions $x_1 = 0, \frac{3}{2} \leq x_2 \leq 2$ sont solutions optimales. La solution $x_1 = 0, x_2 = 2$ est la seule à coordonnées entières.

Pour $f_3(x_1, x_2) = x_1$ on a $f_3 = \frac{3}{2} - x_2 + \frac{1}{2}x_3$. Le coefficient de x_3 est strictement positif on effectue un changement de base. x_2 restant nul, le système d'équations s'écrit :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\
x_4 &= -x_3 \\
x_5 &= \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_3
\end{aligned}
$$

On cherche la plus grande valeur de x_3 telle que $x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$. On obtient $x_3 = 0$ et la $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{7}{2}$ dans la base B_{135} qui a la même valeur $f_3 = \frac{3}{2}$ que la solution obtenue pour B_{145}. Le système correspondant est :

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_4 &= \frac{3}{2} \\
-4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\
\frac{1}{2}x_4 + x_5 &= \frac{7}{2} \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

et $f_3 = \frac{3}{2} + x_2 - \frac{1}{2}x_4$

On cherche la plus grande valeur de x_2 telle que $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0$ et $x_4 = 0$. Cette valeur n'est pas bornée et la solution du programme linéaire n'est pas bornée.

Base initiale

Il est nécessaire d'introduire une variable artificielle x_6.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 &= 3 \\
2x_1 - 2x_2 + x_4 &= 3 \\
-x_1 + x_2 + x_5 &= 2 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Le tableau initial Tab. 3 de la phase 1 est alors (l'objectif étant max $-x_6$) :

Après une itération on obtient le tableau Tab. 3

En introduisant la fonction $f_1 = -x_1 - x_2$ on obtient le tableau Tab. 3 : ce tableau correspond à une solution optimale.

Considérons le programme linéaire suivant :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f_i(x_1, x_2) \\
& 2x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad (1)
\end{aligned}
$$

	1	2	3	4	5	6	
6	2	**2**	-1	0	0	1	3
4	2	-2	0	1	0	0	3
5	-1	1	0	0	1	0	2
	2	2	-1	0	0	0	3

TAB. 1 – tableau initial phase 1

	1	2	3	4	5	6	
2	1	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
4	0	-4	1	1	0	-1	0
5	0	2	-$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
	0	0	0	0	0	-1	0

TAB. 2 – tableau final phase 1

	1	2	3	4	5	
2	1	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
4	0	-4	1	1	0	0
5	0	2	-$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{7}{2}$
	0	0	-$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$

TAB. 3 – tableau initial phase 2

$$
\begin{array}{rcll}
2x_1 - 2x_2 & \geq & 3 & (2) \\
-x_1 + x_2 & \leq & 2 & (3) \\
x_1,\ x_2 & \geq & 0 & (4), (5)
\end{array}
$$

Après mise sous forme standard et introduction d'une variable artificielle on obtient le système de contrainte :

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 3 \\
2x_1 - 2x_2 - x_4 + x_6 & = & 3 \\
-x_1 + x_2 + x_5 & = & 2 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

Le tableau initial est Tab. 3 (l'objectif étant $\max -x_6$) :

	1	2	3	4	5	6	
3	2	2	1	0	0	0	3
6	**2**	-2	0	-1	0	1	3
5	-1	1	0	0	1	0	2
	2	-2	0	-1	0	0	3

Tab. 4 – tableau initial phase 1

Après une itétration on obtient Tab. 3

	1	2	3	4	5	6	
3	0	4	1	1	0	-1	0
1	1	-1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
5	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
	0	0	0	0	0	-1	0

Tab. 5 – tableau final phase 1

En introduisant la fonction $f_4 = x_1$ on obtient le tableau Tab. 3.

Il est à noter que la solution $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0$ correspondante est optimale bien que $\Delta_2, \Delta_4 > 0$. Après une itération on obtient Tab. 3 correspondant à la même solution $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0$.

	1	2	3	4	5	
3	0	4	1	1	0	0
1	1	-1	0	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
5	0	0	0	-$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{2}$
	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{3}{2}$

TAB. 6 – tableau initial phase 2

	1	2	3	4	5	
4	0	4	1	1	0	0
1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
5	0	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{7}{2}$
	0	-1	-$\frac{1}{2}$	0	0	-$\frac{3}{2}$

TAB. 7 – après une itération de la phase 2

Dualité

Sous forme canonique on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\max \quad f_i(x_1,x_2) & = & c_1x_1 + c_2x_2 \\
-2x_1 - 2x_2 & \leq & -3 \quad (1) \\
2x_1 - 2x_2 & \leq & 3 \quad (2) \\
-x_1 + x_2 & \leq & 2 \quad (3) \\
x_1,\ x_2 & \geq & 0 \quad (4),(5)
\end{array}$$

et le dual est

$$\begin{array}{rcl}
\min -3y_1 + 3y_2 + 2y_3 & & \\
-2y_1 + 2y_2 - y_3 & \geq & c_1 \quad (1) \\
-2y_1 - 2y_2 + y_3 & \geq & c_2 \quad (2) \\
y_1,\ y_2,\ y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

pour $f_2(x_1,x_2) = -x_1$ on a :

$$\begin{array}{rcl}
\min -3y_1 + 3y_2 + 2y_3 & & \\
-2y_1 + 2y_2 - y_3 & \geq & -1 \quad (1) \\
-2y_1 - 2y_2 + y_3 & \geq & 0 \quad (2) \\
y_1,\ y_2,\ y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

sous forme standard :

$$\begin{array}{rcl} -\max 3y_1 - 3y_2 - 2y_3 & & \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 & = & 1 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 & = & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

Le premier tableau est donné dans 3

	1	2	3	4	5	
4	2	-2	1	1	0	1
5	2	2	-1	0	1	0
	3	-3	-2	0	0	0

TAB. 8 – tableau initial dual

Après une itération on obtient le tableau optimal 3

	1	2	3	4	5	
4	0	-4	2	1	-1	1
1	1	1	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
	0	-6	-$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{3}{2}$	0

TAB. 9 – tableau final

Nous notons que le tableau précédent correspond à une solution optimale. pour $f_3(x_1, x_2) = x_1$ on a :

$$\begin{array}{rcll} \min -3y_1 + 3y_2 + 2y_3 & & & \\ -2y_1 + 2y_2 - y_3 & \geq & 1 & (1) \\ -2y_1 - 2y_2 + y_3 & \geq & 0 & (2) \\ y_1,\ y_2,\ y_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

En additionant (1) et (2) on obtient : $-4y_1 \geq 1$ qui n'admet pas de solution pour $y_1 \geq 0$. Le dual est donc irréalisable (on a vu plus haut que le primal est non borné)