Notes d'exercices Programmation Linéaire Avancée
séance du 20/10/2010

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Résolution lorsque $x_4 = 0$: Le système est :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Utilisons l'algorithme de Gauss-Jordan pour calculer A^{-1}, si elle existe :

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{5}{6} \end{array}\right)$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$ et la solution du système est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résolution du système lorsque $x_4 = 1$: Le système est :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

et la solution est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

De manière générale pour toute valeur de x_4 on obtient :le système

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 + x_4 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 - 2x_4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 - x_4 \end{aligned}$$

qui a pour solution

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 + x_4 \\ -2 - 2x_4 \\ 2 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{7}{6}x_4 \\ 1 - \frac{5}{3}x_4 \\ 1 - \frac{11}{3}x_4 \end{pmatrix}$$

Ce système a une solution unique pour toute valeur de x_4.

Cherchons la plus grande valeur possible de x_4, si elle existe, en contraignant chacune des variables à être positive, ce qui s'écrit $\max x_4, X \geq 0$:

Nous devons avoir : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{7}{6}x_4 \\ 1 - \frac{5}{3}x_4 \\ 1 - \frac{11}{3}x_4 \end{pmatrix} \geq 0$, soit $x_4 \geq -\frac{3}{7}, x_4 \leq \frac{3}{5}, x_4 \leq \frac{3}{11}$, c'est-à-dire $x_4 \leq \min(\frac{3}{5}, \frac{3}{11}) = \frac{3}{11}$.