

Tous les documents sont autorisés. Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice 1 : Calcul des Prédicats (3pts)

Soient

$P(x)$: x est un poisson

$N(x)$: x sait nager

(a) $\forall x(P(x) \wedge N(x))$

(b) $\forall x(P(x) \rightarrow N(x))$

(c) $\exists x(P(x) \wedge N(x))$

(d) $\exists x(P(x) \rightarrow N(x))$

1. Trouver un modèle qui satisfait a et b.
2. Trouver un modèle qui satisfait b et pas a
3. Trouver un modèle qui satisfait c et d.
4. Trouver un modèle qui satisfait d et pas c.
5. Est il possible de trouver un modèle satisfaisant a et pas b ? Justifier votre réponse.

exercice 2 : preuve (2pts)

Soient les formules suivantes :

1. $(H1)\exists x\exists y(x \neq y)$: Il existe deux individus distincts
2. $(H2)\forall x(R(x) \vee B(x))$: tous le monde est rouge ou bleu
3. $(H3)\forall x\forall y(R(x) \wedge R(y) \rightarrow x = y)$: Il existe 0 ou une seule personne rouge
4. $(B)\exists x(B(x))$ Il existe une personne bleue

Montrer que $H1, H2, H3 \vdash B$.

Exercice 3 : theorie des ensembles (7 points)

Il s'agit de modéliser partiellement la répartition des droits de vote dans le monde. Pour cela, on se donne les entités suivantes :

1. PAYS = l'ensemble des pays du monde.
2. HUM = l'ensembles des individus du monde.
3. PAYSVN = l'ensemble des pays où le droit de vote est accordé aux personnes nées dans ce pays.
4. PAYSVR = l'ensemble des pays où le droit de vote est accordé aux personnes résidant dans ce pays.
5. la relation $naissance_{pays} \in HUM \leftrightarrow PAYS$ reliant les individus à leur pays de naissance.

6. la relation $residencepays \in HUM \leftrightarrow PAYS$ reliant les individus à leur pays de résidence.

1. Formaliser les contraintes suivantes :

- (a) Il n'est pas obligatoire qu'un pays accorde le droit de vote. En Revanche, ceux qui accordent le droit de vote aux résidents l'accordent nécessairement aussi aux personnes nées dans le pays.
- (b) Chaque individu est né dans un unique pays et réside dans un unique pays.
- (c) tous les pays comptent au moins une personne qui y réside.

2. définir les objets suivants en utilisant les entités précédentes :

- (a) l'ensemble des pays où le droit de vote n'existe pas.
- (b) L'ensemble *Habvn* des gens nés dans les pays qui accordent le droit de vote.
- (c) L'ensemble *Expat* des expatriés c'est à dire l'ensemble des gens habitant un pays dans lequel il ne sont pas nés.

3. a quoi correspond l'ensemble suivant :

$dom((naissancepays; residencepays^{-1}) \cap id)$ où *id* est la fonction identité sur *HUM* c'est à dire $\{(x, y) / (x, y) \in HUM \times HUM \wedge x = y\}$?

exercice 4 : spécifications de programmes et contrats (3pts)

1. Soit la spécification suivante :

Précondition : $t1 \in 1..n \rightarrow N \wedge t2 \in 1..n \rightarrow N$

Postcondition : $t3 \in 1..2n \rightarrow N \wedge succ; (impair * \triangleleft t3) \cup (\{1\} \triangleleft t3) = t1 \wedge$

$succ; (pair \triangleleft t3) = t2$

*impair** est l'ensembles des entiers impairs supérieur a 1 et *pair* est l'ensemble des entiers pairs.

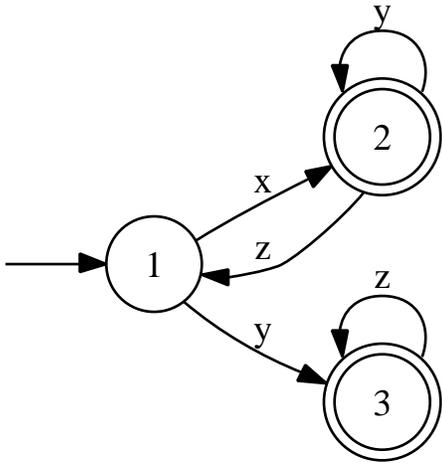
- (a) Donner un exemple de suites $t1, t2, t3$ respectant cette spécification
- (b) Traduire en francais la spécification

2. En informatique, pour implanter le type de données abstrait Ensemble, on peut utiliser des suites sans répétitions.

Ecrire la spécification d'un programme qui fait l'union de 2 ensembles implantés par des suites sans répétitions.

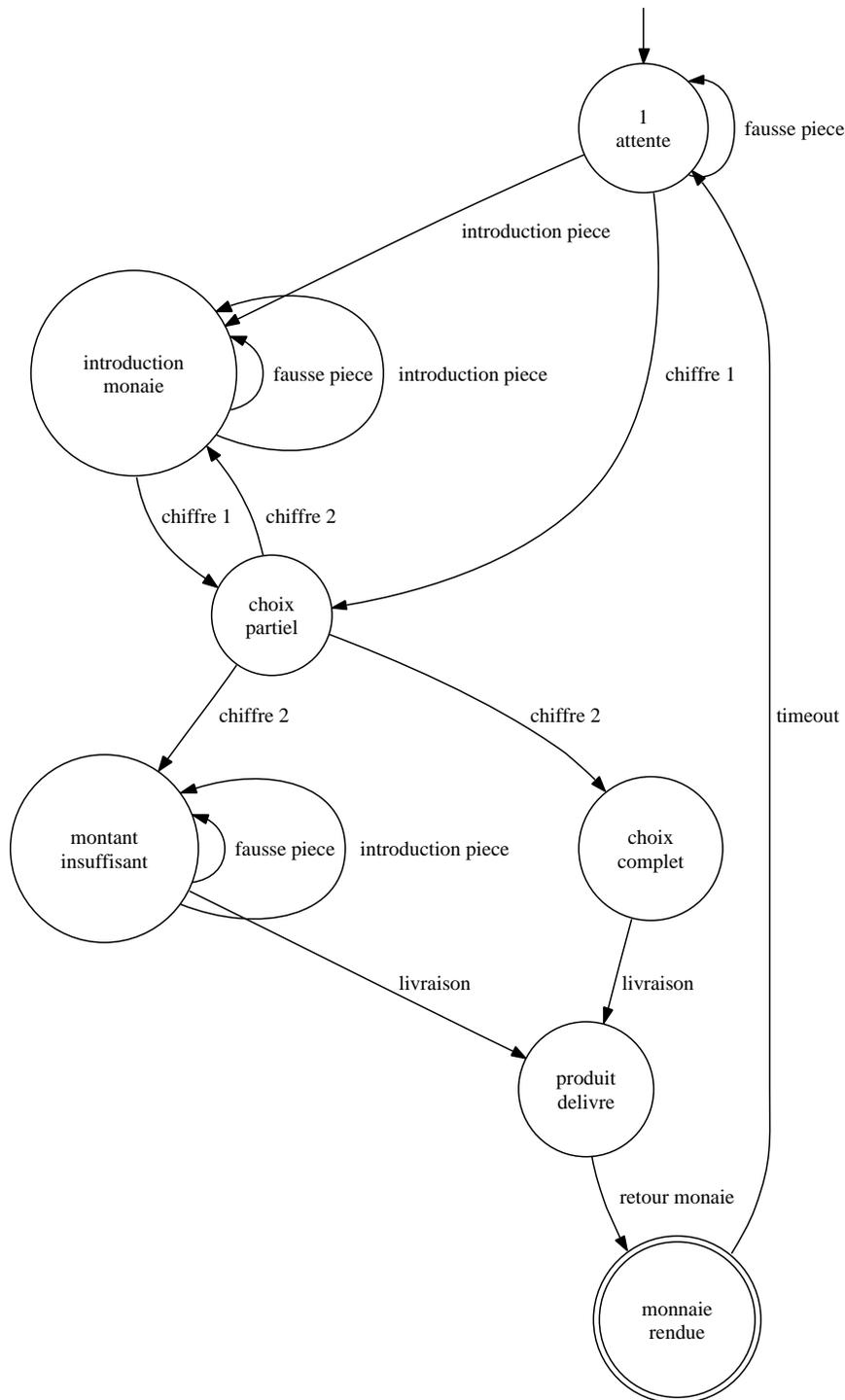
Exercice 5 (3pts)

Soit l'automate représenté par le graphe suivant :



1. donnez le quintuplet $A=(\Sigma,Q,\delta,i,F)$ notant formellement cet automate.
2. donnez la calcul (la séquence des pas de calculs) permettant d'affirmer que le mot $xyzyzz$ appartient au langage $L(A)$ défini par A .
3. donnez le langage $L(A)$ sous forme d'une expression régulière (aucune justification n'est demandée).

Exercice 7 (7 pts)



Cet automate fini modélise le comportement d'un distributeur automatique de confiseries. Les différents

produits disponibles sont identifiés par un numéro à deux chiffres. L'automate fait intervenir des événements venant des dispositifs mécaniques de l'appareil :

- fausse pièce : les capteurs ont détecté l'insertion d'une pièce dans le monayeur, mais cette pièce ne respecte pas les conditions de poids et de diamètre. Elle est donc rejetée immédiatement.
- pièce OK : une pièce correcte a été introduite. Sa valeur s'ajoute à la somme disponible.
- chiffre 1 : l'utilisateur a tapé une touche du clavier et aucun chiffre n'a été mémorisé auparavant.
- chiffre 2 : l'utilisateur a tapé une touche du clavier et un chiffre a été mémorisé auparavant.
- livraison : une trappe a été ouverte pour faire tomber un produit.
- retour monnaie : la monnaie due à l'utilisateur (somme introduite - prix du produit) est restituée.

En vous référant à l'automate donné, répondez aux questions suivantes :

1. peut-on introduire une somme d'argent et acheter deux produits sans réintroduire d'argent entre les deux ?
2. pour ne pas alourdir le graphique, on n'a pas représenté l'annulation. En appuyant sur le bouton d'annulation, l'utilisateur renonce à acheter et la somme qu'il a introduite lui est restituée. De quels états de l'automate peut-on annuler ? Dans quel état se trouve-t-on après annulation ?
3. Pourquoi y a-t-il trois transitions avec chiffre 2 depuis l'état choix partiel ?
4. Cet automate est-il déterministe ? Un distributeur de friandises est-il déterministe ?
5. Donnez un mot du langage (c'est à dire la suite des étiquettes d'un chemin de l'automate).
6. Quelles informations importantes pour décrire le fonctionnement du distributeur n'apparaissent pas dans l'automate ?
7. Le distributeur a un écran permettant d'afficher un court message. Associez les messages suivants à des états de l'automate :
 - Faites votre choix
 - Introduisez + somme
 - choix + chiffre 1
 - choix + chiffre 1 + chiffre 2
 - reste + somme
 - choix invalide
 - au revoir et merci

Dans ces messages, somme, chiffre 1 et chiffre 2 sont des variables qui dépendent des prix, sommes introduites et choix tapés au clavier.