Chapitre 1

Introduction

Dans les chapitres qui suivent, nous allons apprendre un langage.

– Un langage permettant de décrire au moyen d'un petit nombre de concepts un grand nombre de choses, en particulier des choses qui ont trait à l'informatique. On peut citer, par exemple, les spécifications de programme, les programmes eux mêmes ou encore les tables des bases de données.
– C'est un langage dit **formel**. Il s'oppose en cela aux langues que l'on parle, dite **naturelles**. Comme une langue naturelle, une langue formelle est formée de phrases, qu'on appelle des formules, qui sont soumises à des règles de formation (syntaxe, grammaire ...), et qui ont un sens. Mais les langues formelles ont ceci de particulier qu'elles ne sont pas ambigûes : chaque phrase à un sens unique.
– C'est un langage de **spécification**. Il s'oppose en cela aux langages de **programmation**. Avec un langage de programmation, on exprime comment on obtient un résultat. Avec un langage de spécification, on exprime ce que l'on veut obtenir.
– Parceque ce langage est formel, il est possible de vérifier que ce qui est exprimé est vrai ou faux. C'est un langage fait pour **raisonner**, pour démontrer.

Imaginons un inspecteur logicien qui décide de formaliser logiquement les résultats de son enquète en cours, afin de s'assurer de la rigueur de ses déductions.

Voici l'état d'avancement de l'enquète : on sait qu'un vol a ete commis. 3 malfaiteurs notoires Arthur, Benoit et Charles sont apprehendés. On a pu établir que

1. Nul autre que ces 3 là ne peuvent etre impliqués.
2. Arthur ne travaille jamais sans un complice

3. Charles est innocent

L'inspecteur formalise cela en écrivant les 3 formules suivantes :

1. $A \vee B \vee C$
2. $A \rightarrow (B \vee C)$
3. $\neg C$

L'inspecteur a écrit des formules qui traduisent formellement les faits recueillis durant l'enquète. On a une formule pour chaque fait, mais ceci n'est pas toujours le cas. Ces formules sont des formules d'un langage logique appelé *Calcul des Propositions*. C'est un des 3 langages que nous étudierons. Nous étudierons aussi le *Calcul des Prédicats* et la *théorie des Ensembles*.

1.1 Les ingrédients des formules

Dans ces formules, A désigne la phrase : Arthur est coupable, B désigne la phrase : Benoit est coupable et C désigne la phrase : Charles est coupable. On appelle ces phrases des *propositions*.

On a aussi des liens ($\wedge$ pour et, $\vee$ pour ou , $\neg$ pour non, $\rightarrow$ pour si alors et $\leftrightarrow$ pour si et seulement si) que l'on appelle des *connecteurs*.

En Calcul des propositions, ce sera toujours le cas : toutes les formules devront être écrites avec ces ingrédients. Une formule est soit un lien reliant des formules plus petites, soit une formule indécomposable, une sorte de boite noire c'est à dire une proposition.

1.2 Traduction des faits en formules

1. Charles est innocent peut être traduit par Charles n'est pas coupable. Cette phrase est elle décomposable au moyen d'un lien parmi nos connecteurs ? Oui : $\neg$ Charles est coupable.
   Charles est coupable n'est pas décomposable avec nos connecteurs. C'est donc une proposition indécomposable, une proposition que nous nommons C. On obtient donc la formule $\neg C$.
2. Nul autre que Arthur, Benoit et Charles ne peuvent etre impliqués peut se paraphraser en français par : Arthur est coupable ou Benoit est coupable ou Charles est coupable à condition de comprendre par *ou* le fait que l'un ou l'autre ou les deux sont coupables. C'est exactement ce que signifie en logique le connecteur $\vee$.

3. Arthur ne travaille jamais sans un complice peut être paraphrasé par : Si Arthur est coupable , alors Benoit ou Charles aussi. On reconnait ici le lien $\rightarrow$ reliant Arthur est coupable (A) , à Benoit est coupable ou Charles est coupable qui se décompose à son tour en $B \vee C$. On obtient donc $A \rightarrow (B \vee C)$. Remarquons que les parenthèses refletent la hiérarchie des connecteurs issues de notre analyse.

1.3 formaliser, un travail d'abstraction et de précision

On peut avoir l'impression de na pas avoir fait grand chose : la traduction formelle ressemble beaucoup à l'énoncé en langue naturelle. Il y a cependant 2 différences essentielles :

1.3.1 Les propositions ont été vidées de leur sens concret.

A, B et C, ne désignent pas les 3 faits *Arthur est coupable, Benoit est coupable et Charles est coupable* tels qu'ils existent dans notre monde, mais n'importe quels faits.

Les formules parlent de 3 faits quelconques. Elles énoncent les seules choses que l'on sait d'eux.

Si, par exemple, l'inspecteur avait choisi de formaliser son problème avec un symbole de proposition supplémentaire D pour désigner *Charles est innocent*, il aurait dû traduire la troisième phrase par : D. Mais alors, le rapport entre la culpabilité et l'innocence aurait dû être explicité, en ajoutant une quatrième formule $D \leftrightarrow \neg C$ qui dit que l'innocence de charles est le contraire de la culpabilité de Charles.

Puisque A B et C ont été vidés de leur sens, ces trois formules désignent aussi bien les faits suivants :

1. A est une fille ou B est une fille ou C est une fille.
2. Si A est une fille alors B ou C aussi.
3. C est un garçon.

1.3.2 Les liens logiques entre les prédicats ont été précisés.

A l'inverse, on a exprimé les rapports entre les individus et les propriétés de façon très précise. En remplacant, par exemple, le *ou* de la langue française par le connecteur $\vee$, on sait qu'on emploie un ou inclusif.

Chaque connecteur autorisé à un sens non ambigû, parceque ce sens est défini. Le sens d'un connecteur est défini en fonction de la vérité.
Définir le connecteur $\vee$ c'est dire :

> Une formule de la forme $s \vee t$ est vraie si et seulement si F est vraie, ou G est vraie ou les 2.

C'est ce qu'on appelle la *table de vérite* du connecteur $\vee$.

s	t	(s $\vee$ t)
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

1.4 Raisonner sur la formalisation

La formalisation exprime la structure logique, les liens logiques qui unissent les faits de base entre eux.

Grâce à cela, nous allons pouvoir raisonner sur notre formalisation : nous allons pouvoir, par exemple, déduire avec certitude que Benoit est coupable. Nous pourrons aussi connaitre le statut de nos formules : sont elles vraies dans tous les mondes possibles ? , sont elles vraies dans certain monde seulement ? ou encore jamais vraies ?.

Pour raisonner, nous allons en quelques sortes faire le trajet inverse que celui que nous avons fait jusqu'ici : nous allons déterminer l'ensemble des mondes ou notre formalisation est vraie. Un monde oû une formule est vraie s'appelle un *modèle* de la formule.

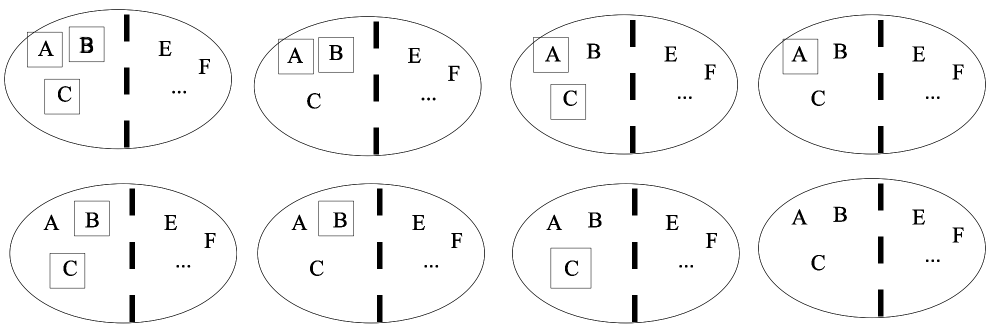
Les faits qui sont vrais dans tous les modèles de la conjonction de nos trois formules seront les faits qui se déduisent d'elles.

1.4.1 le point de départ

Les mondes qui nous interessent doivent avoir au moins 3 faits, un qui tient le rôle de Arthur est coupable, un autre pour Benoit est coupable et un troisième pour Charles est coupable. Les dessins qui suivent épuisent toutes les possibilités :

1. les 3 sont coupables,

2. Arthur et Benoit sont coupables
3. Arthur et Charles sont coupables
4. Arthur est le seul coupable
5. Benoit et Charles sont coupables
6. Benoit est le seul coupable
7. Charles est le seul coupable
8. aucun n'est coupable



Les encadrés désignent les coupables

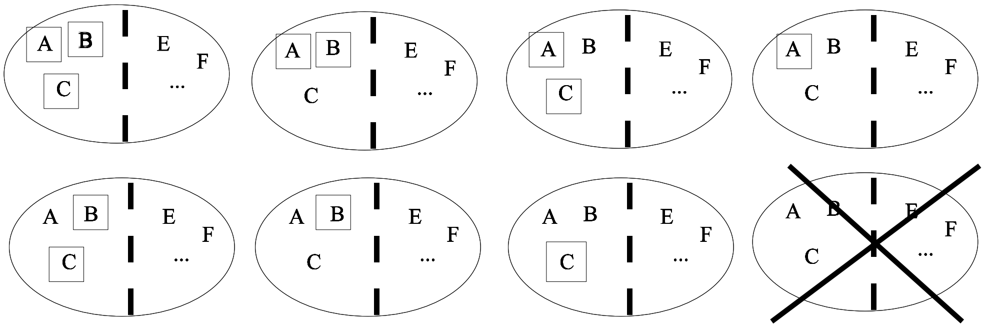
1.4.2 modéles de la formule 1

La table de vérité du $\vee$:

s	t	(s $\vee$ t)
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

nous dit que $s \vee t$ n'est faux que lorsque s et t sont faux en même temps. Le seul monde où $A \vee B \vee C$ est faux est donc celui où aucuns des 3 n'est coupable.

Les modèles de cette formule sont donc :



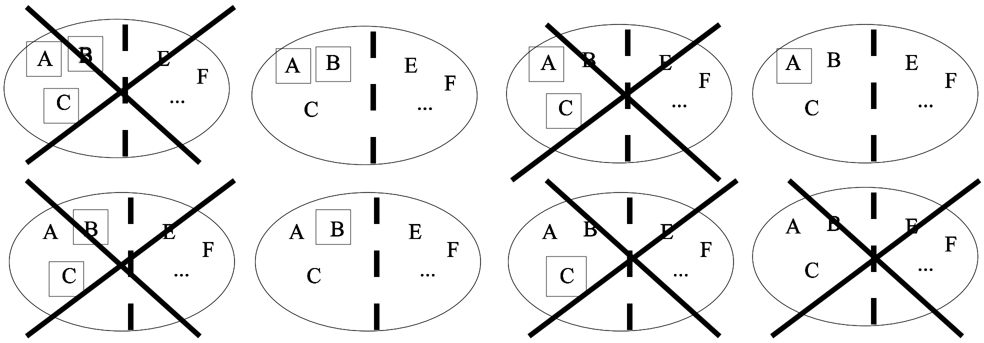
Les encadrés désignent les coupables

1.4.3 modèles des formules 3 et 1

Parmi les 7 restants, determinons lesquels respectent la contrainte exprimée par la formule 3 :$\neg C$. La table de vérité de la négation nous dit que $\neg F$ est vraie là où F est fausse.

s	(¬ s)
v	f
f	v

Il nous faut donc ne garder que ceux où C est fausse.

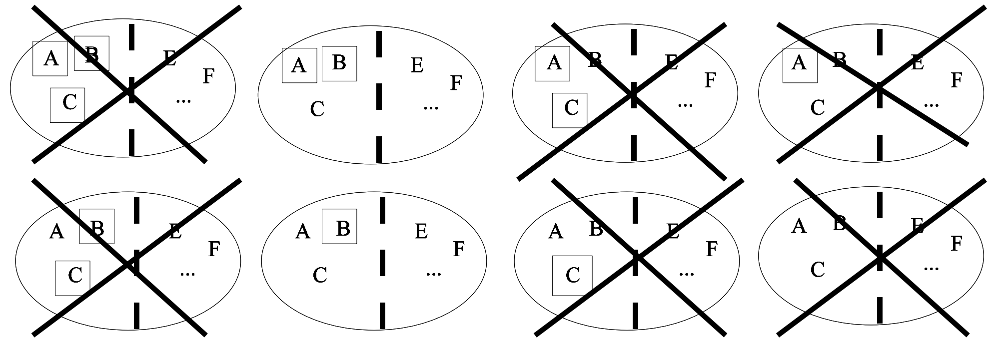


Les encadrés désignent les coupables

1.4.4 modèles des formules 3, 1 et 2

Parmi les 3 restants, lesquels verifient la formule $A \rightarrow (B \vee C)$? Cette formule nous dit que dès que si Arthur est coupable, l'un ou l'autre des 2 autres aussi. Cette formule est donc vraie dans le modèle où Arthur et Benoit sont coupables. Elle est en revanche fausse dans le modèle où seul Arthur est coupable. Elle est vraie dans le modèle ou Benoit est seul coupable : une implication $X \rightarrow Y$ n'affirme pas que X est vrai, seulement que X ne peut l'être sans Y. C'est bien ce que dit la table de vérité de l'implication :

s	t	(s → t)
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v



Les encadrés désignent les coupables

1.4.5 Où l'on déduit que Benoit est coupable

Il n'y a que deux possibilités pour que nos 3 formules soient vraies ensemble : un monde où Arthur et Benoit sont les 2 coupables, et un monde où Benoit est coupable tout seul.

A chaque fois Benoit est coupable. La culpabilité de Benoit est donc une conséquence logique des trois formules. L'inspecteur peut l'inculper sans crainte et les juges le condamner.

Lorsque'une formule (par exemple B) est vraie dans tous les modèles réalisant un ensemble de formules, on dit que cette formule est une *conséquence ou se déduit* de l'ensemble des formules.

En revanche, personne ne peut affirmer à ce point de l'enquète que A est coupable. Il est possible que Benoit est coupable ai fait le coup tout seul. A ne se déduit pas de nos 3 formules.

1.4.6 Où l'on déduit que B est une fille

L'interprétation de A B et C par Arthur est coupable, Benoit est coupable et Charles est coupable, n'a tenu aucun rôle dans notre raisonnement. Nous avons montré que pour n'importe quelle interprétation de nos propositions A B et C, dès que nos trois formules sont vraies, la proposition B l'est aussi. Autrement dit, en interprétant A B et C par A est une fille , B est une fille, C est une fille, on déduit aussi de nos trois formules que B est une fille.

1.4.7 Différentes notions de vérité

Peut on dire quelque chose de nos trois formules de départ ? Pour chacune d'entre elles, il est possible de construire des modèles qui les rendent vraies et des modèles qui les rendent fausses. Ces formules sont dites *réalisables.*

Les formules réalisables dans tous les mondes sont des formules *valides, des tautologies* (on reserve le mot vrai pour ce cas), et celles qui ne sont vraies dans aucun monde sont des *antilogies.*

Chapitre 2

Le langage du Calcul des propositions

Dans ce chapitre, nous allons définir précisemment comment ecrire des formules (la syntaxe du Calcul des propositions) et leur sens (la sémantique) c'est à dire quel est leur statut par rapport à la vérité.

2.1 construire des formules bien formées

Les formules du calcul des propositions sont des mots qui respectent un certain nombre de règles.

2.1.1 L'alphabet

Les formules sont des mots qui sont faits en utilisant un jeu de symboles précis . C'est l'alphabet du Calcul des propositions.

Cet alphabet est le suivant :

1. un ensemble de *connecteurs* : $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
2. un ensemble de symbole de ponctuation : les parenthèses ouvrantes et fermantes
3. un ensemble de *variables propositionnelles* : toutes suites de lettre et de chiffres.

Par exemple : $XX \rightarrow \neg \vee A(\wedge BB($ est un mot fabriqués à partir de l'alphabet du calcul des propositions, $XX \vee (A \wedge XX)$ aussi alors que $XX!Y\forall\vee$ ne l'est pas : ! et $\forall$ ne sont pas des symboles de l'alphabet.

2.1.2 La grammaire

Connaitre l'alphabet avec lequel on peut former des formules ne suffit pas. $XX \rightarrow \neg \vee A(\wedge BB($ n'est pas une formule, alors que $(XX \vee (A \wedge XX))$ en est une.

Il faut aussi avoir des règles, une grammaire, qui précisent les règles de formation des mots.

La grammaire du Calcul des propositions se résume aux 2 règles suivantes :

1. Les variables propositionnelles sont des formules.
2. Si A et B sont des formules alors $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\neg A$ et (A) sont des formules.

La première règle nous permet d'affirmer que XX, A BB sont des formules, puisque ce sont des variables propositionnelles.

De cela plus la deuxième règle, on obtient que $(A \wedge XX)$ est une formule. Par une nouvelle application de la règle 2 on obtient alors que $(XX \vee (A \wedge XX))$ en est une.

En revanche , aucune suite d'applications des règles 1 et 2 ne permet d'établir que $XX \rightarrow \neg \vee A(\wedge BB($ est une formule.

Remarque 1 *L'appartenance à l'ensemble des formules est décidable (ie il existe un algorithme permettant de décider si un mot quelconque est une formule)*

Ces règles nous disent qu'une formule est soit une variable propositionnelle, soit un connecteur binaire $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ appliqué à deux formules, soit le connecteur $\neg$ appliqué a une formule.

2.2 le sens des formules

Le sens d'une formule est en quelques sortes l'ensemble des mondes qui la rendent vraies. Si tous les mondes la rendent vraies, cette formule est *valide*. On dit aussi que c'est une tautologie. Si certains mondes seulement la rendent vraies, cette formule est *réalisable*. Si aucun monde la rend vraie, cette formule est une *antilogie*.

2.2.1 Les variables propositionnelles

Les variables propositionnelles ne sont que réalisables. A peut toujours être interprétée par un fait vrai , par exemple Zola est ecrivain, ou par un fait faux : Zola est cinéaste.

2.2.2 Les formules complexes

La valeur de vérité d'une formule complexe où apparait des connecteurs, dépend de la valeur de vérité des variables propositionnelles et du sens du connecteur.

Par exemple : $A \wedge B$ est vraie dans un monde ou A est vraie et B est vraie. En interprétant A par Zola est ecrivain et B par Flaubert est ecrivain, cette formule est vraie. En interprétant A par Zola est ecrivain et B par Flaubert est cineaste, cette formule est fausse. Ainsi, $A \wedge B$ est réalisable mais pas valide. L'ensemble des mondes qui rendent vraies cette formule est l'ensemble des mondes qui rendent vraies A et B à la fois. Une formule réalisable décrit un ensemble de monde restreint : ceux qui la rendent vraies.

Le connecteur $\wedge$ est défini, c'est à dire que à interpretation fixée des formules F et G qu'il relie, on sait déterminer la valeur de verité de la formule $F \wedge G$. La définition de chaque connecteur est donné par la table de vérité de chacuns des connecteurs.

En revanche $A \vee \neg A$ est valide : quelquesoit le sens que l'on donne à A, cette formule est vraie. L'ensemble des mondes qui la rendent vraie est l'ensemble de tous les mondes possibles. Cette formule n'impliquent aucune contrainte sur l'univers, elle decrit tous les mondes.

Pour finir $A \wedge \neg A$ est une antilogie : Aucun monde ne peut rendre vraies à la fois une chose et son contraire. Elle ne parle d'aucun monde.

2.2.3 Tables de vérité des connecteurs

Une formule de la forme $\neg s$ est vraie si et seulement si s est fausse

s	(¬ s)
v	f
f	v

Une formule de la forme $s \wedge t$ est vraie si et seulement si s est vraie, et t est vraie.

s	t	(s ∧ t)
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Une formule de la forme $s \vee t$ est vraie si et seulement si F est vraie, ou G est vraie ou les 2.

s	t	(s ∨ t)
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Une formule de la forme $s \vee t$ est fausse si et seulement si s est vraie et t est fausse.

s	t	(s → t)
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Une formule de la forme $s \leftrightarrow t$ est vraie si et seulement si s et t sont vraies en même temps , ou bien fausses en même temps.

s	t	(s ↔ t)
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

2.2.4 Calculer la valeur de vérité d'une formule

A partir de la table de vérité des connecteurs, il est possible de calculer la valeur de vérité d'une formule toute entière :
exemple :

i_1	s	t	(s ∨ t)	(t ∧ s)	(s ∨ t) → (t ∧ s)
i_1	v	v	v	v	v
i_2	v	f	v	f	f
i_3	f	v	v	f	f
i_4	f	f	f	f	v

Chaque ligne correspond à une possible. Si on obtient vrai a chaque ligne, la formule est une tautologie, Si on obtient faux a chaque ligne, la formule est une antilogie, Sinon, la formule est réalisable.

2.3 modéliser

Retournons à ce qui nous occupe : nous voulons utiliser ce langage, pour spécifier des problèmes, des systèmes informatiques .... Spécifier quelque chose , c'est décrire les mondes où ce quelque chose est vrai. C'est donc écrire des formules decrivant ces mondes.

Chacune de ces formules n'ont aucune raison d'être valide. Bien au contraire, leur rôle est de restreindre l'ensemble des mondes possibles, a ceux où ce dont on veut rendre compte est vrai. Les formules constituant notre spécification seront donc par essence réalisables.

Aucun outil formel ne pourra jamais permettre de prouver qu'une spécification rend bien compte de ce qu'elle est censée modéliser. La correction du passage de l'informel au formel ne pourra jamais etre objet de preuve. D'où la necéssité absolue de maitriser parfaitement ce langage pour être capable de dire ce que l'on veut dire.

En revanche, une fois que l'on tient une spécification d'un problème, il est possible de raisonner dessus de façon rigoureuse. On peut déduire formellement des propriétés. On pourra démontrer que des proprétés sont des conséquences logiques des formules constituant notre spécification, en montrant que ces propriétés sont vraies dans tous les modèles de notre spécification.

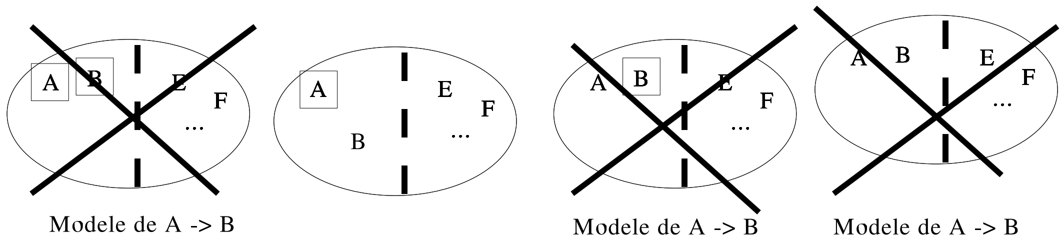
2.4 Exercices

Exercice 1 *On juge un homme accusé d'avoir trempé dans un cambriolage.*
Le procureur et l'avocat disent tour à tour :
Le procureur : Si l'accusé est coupable, alors il a un complice.
L'avocat : C'est faux!
Pourquoi est ce la pire des choses que puisse dire l'avocat?

Le procureur dit en fait : l'accusé n'a pas agit seul. Donc l'avocat dit : si il a agit seul. Donc il dit qu'il est coupable.

Formalisation :
Le procureur dit : $A \to B$
L'avocat dit $\neg(A \to B)$

Or , les modèles de $\neg(A \to B)$ *sont les mondes qui rendent faux* $(A \to B)$. *La seule façon de rendre faux* $A \to B$ *est d'avoir* A *vrai et* B *faux, c'est à dire* A *coupable et* B *innocent*



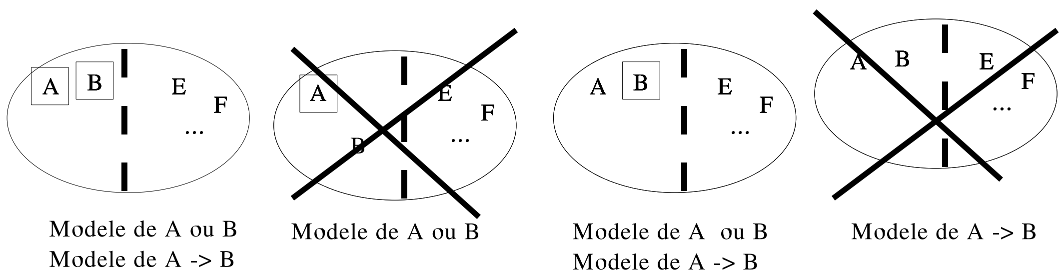
Les encadrés désignent les coupables

Exercice 2 *Supposons que les affirmations suivantes soient vraies :*

1. *J'aime Elisabeth ou j'aime Jeanne*
2. *Si j'aime Elisabeth , alors j'aime Jeanne*

Que peut on en deduire ?

Formalisation :
(1) $A \vee B$
(2) $A \rightarrow B$



Les encadrés désignent les coupables

A= J'aime elizabeth
B = J'aime jeanne

Dans tous les modèles de ces 2 formules B est vraie. J'aime Elizabeth est donc une conséquence de ces 2 formules.

Exercice 3 *Durant une enquète on fait le raisonnement suivant : Si l'accusé est coupable, il etait a Paris au moment du crime Or il était a Marseille Donc il n'est pas coupable*

Peut on vraiment déduire qu'il n'est pas coupable ? Justifier votre réponse par une formalisation et des modèles.