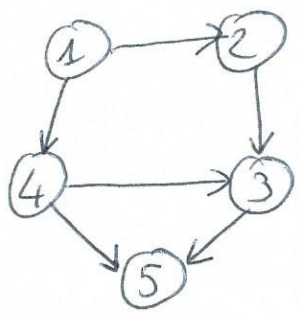
ED 1

Exercice 1

a)



b)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (1,2) & (1,4) & (2,3) & (3,5) & (4,3) & (4,5) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
+1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M^k[i,j]$ = le nb de chemins de k arcs allant de i à j.
(c.f. cours)

d) $M^{[k]}$ se déduit directement de M^k en remplaçant chaque valeur >1 par 1.

$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^{[4]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{[k]}[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un chemin de } k \text{ arcs allant de } i \text{ à } j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

e)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un chemin (élémentaire) de } i \text{ à } j \text{ (ou } i=j) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(A est la matrice d'adjacence du graphe représentant la fermeture reflexo-transitive de G)

Exercice 2

a) $\Gamma^+(A) = \{B, F\}$ $\quad \Gamma^+(B) = \{B, C, E, A\}$ $\quad \Gamma^+(C) = \{D\}$ $\quad \Gamma^+(D) = \{C\}$

$\Gamma^+(E) = \{E, F, B, D\}$ $\quad \Gamma^+(F) = \{A, C\}$

$\Gamma^-(F) = \{E, A\}$

b) $d^+(A) = 2$ $\quad d^+(B) = 4$ $\quad d^+(C) = 1$ $\quad d^+(D) = 1$ $\quad d^+(E) = 4$ $\quad d^+(F) = 2$

$d^-(A) = 2$ $\quad d^-(B) = 3$ $\quad d^-(C) = 3$ $\quad d^-(D) = 2$ $\quad d^-(E) = 2$ $\quad d^-(F) = 2$

c) $E \to F \to A \to B \to E \to D \to C$ est un chemin simple (on n'emprunte aucun arc 2 fois), mais non élémentaire (le sommet E apparaît 2 fois).

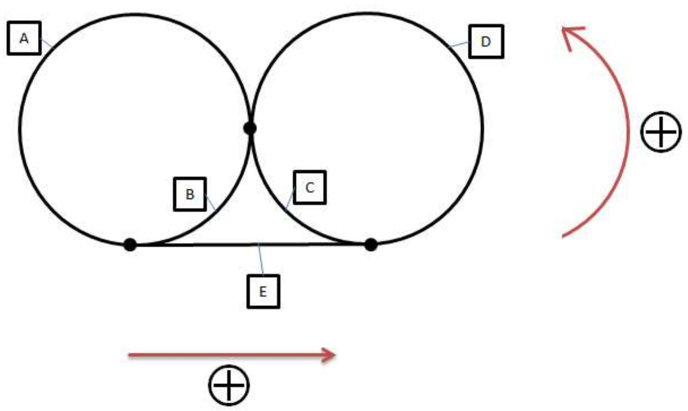
d) Les sommets D et C constituent une composante fortement connexe : une fois arrivé dans cet ensemble de sommets, il n'est pas possible d'en repartir.

Il ne peut donc pas exister de circuit hamiltonien dans G.

e) G est connexe : il ne comporte qu'une unique composante connexe (il existe une chaîne entre toute paire de sommets)

G n'est pas fortement connexe : il n'existe aucun chemin allant de C à B, par exemple.

ED 1 – Exercice 3 – Corrigé indicatif



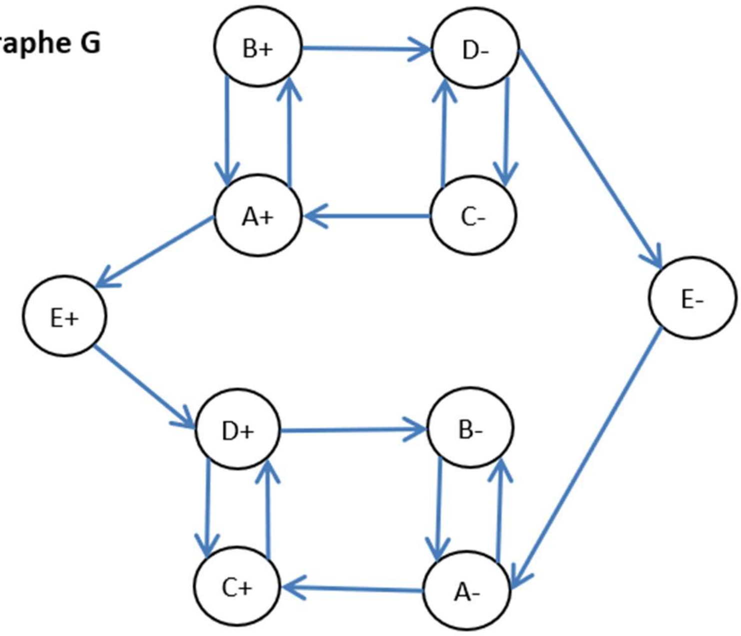
On définit un **sens de rotation** (noté ⊕, correspondant au sens inverse des aiguilles d'une montre).

Notation : T^+ signifie qu'on utilise le tronçon T dans le sens ⊕, T^- dans l'autre sens.

Modélisation :

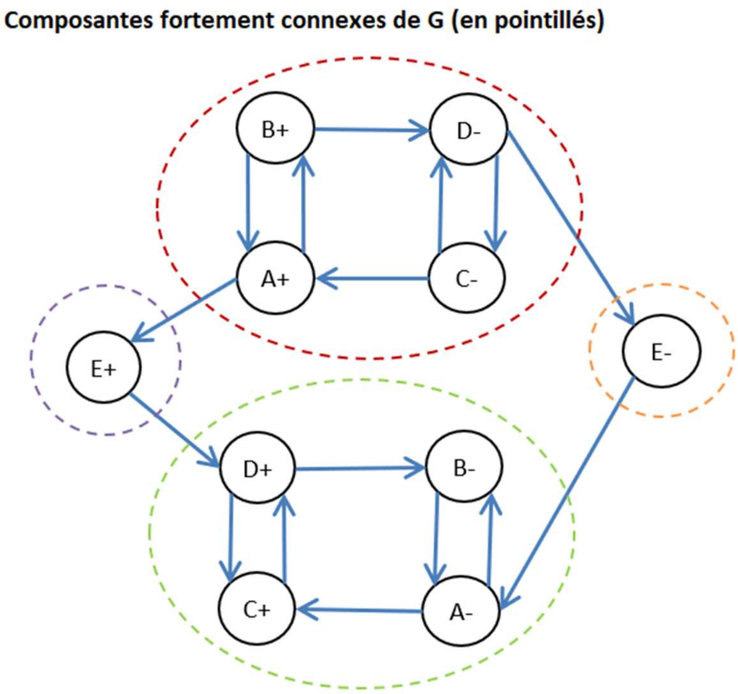
- Un sommet = utilisation d'un tronçon dans un sens donné
- Un arc = passage possible d'un tronçon à l'autre, en respectant le sens de passage

Graphe G

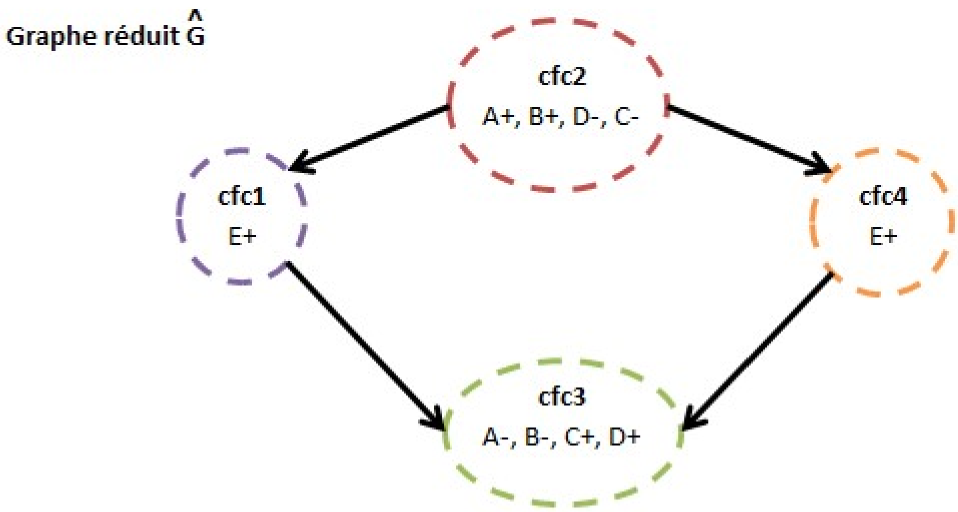


On trouve dans ce graphe 4 composantes fortement connexes (**cfc**), indiquées en pointillé :

(On ne précise pas ici comment trouver ces composantes fortement connexes, le graphe étant de petite taille, il est possible de les trouver « à la main » mais il existe un algorithme permettant de déterminer les cfc d'un graphe quelconque, l'idée est de partir d'un sommet, de trouver sa cfc en déterminant les sommets qui lui sont à la fois ascendants et descendants, puis cette cfc étant trouvée, on supprime mentalement ses sommets du graphe et on itère le procédé à partir d'un sommet quelconque du graphe résultant).



Traçons le graphe réduit $\hat{G}$ de G ($\hat{G}$ est le graphe des composantes fortement connexes, précisant la possibilité d'aller dans G d'une cfc à une autre) :



À l'intérieur d'une cfc, le train circule librement, passant d'un sommet à l'autre. Mais le graphe réduit met en évidence que si on part de E+ (respectivement E-), on ne peut jamais revenir en E+ (respectivement E-) ni aller en E- (respectivement E+).

 E. Soutil (eric.soutil@cnam.fr)