

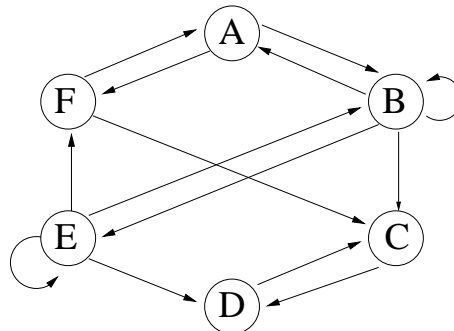
**THÉORIE DES GRAPHERS : notions de base**

I- Soit la matrice binaire M associée au graphe G :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Tracer le graphe représenté par cette matrice.
- (b) Donner la matrice d'incidence (sommets - arcs) de ce graphe.
- (c) Calculer  $M^2, M^3, M^4$ . Discuter la signification des coefficients non nuls de ces matrices.
- (d) Calculer les puissances booléennes de M :  $M^{[2]}, M^{[3]}, M^{[4]}$ . Que pouvez-vous en déduire ?
- (e) Calculer  $A = I \dot{+} M \dot{+} M^{[2]} \dot{+} M^{[3]} \dot{+} M^{[4]}$ . Interpréter A.

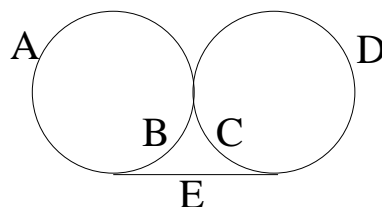
II- Soit le graphe G ci-dessous :



- (a) Enumérer  $\Gamma^+(A), \dots, \Gamma^+(F)$  et  $\Gamma^-(F)$ .
- (b) Donner les demis-degrés intérieurs et extérieurs de chaque sommet.
- (c) Donner un exemple de chemin simple mais non élémentaire.
- (d) Existe-t-il un circuit hamiltonien dans G ?
- (e) G est-il connexe ? fortement connexe ?

III- Soit le schéma du circuit électrique de Laurent. Chaque aiguillage a deux positions possibles. Laurent a remarqué qu'au bout d'un certain temps, quelle que soit la position initiale du train, il n'emprunte jamais la partie E.

- (a) Pouvez-vous, à l'aide d'un graphe à 10 sommets, expliquer pourquoi ?
- (b) Qu'arrive-t-il si on ajoute le tronçon F symétrique de E ?



#### IV- PLANNING D'EXAMEN

Les cinq étudiants Dupont, Dupond, Durand, Duval et Duduche doivent passer certaines épreuves parmi les suivantes : Français, Anglais, Dessin, Couture, Mécanique et Solfège. L'examen se déroulant par écrit, on désire que tous les étudiants qui doivent subir une même épreuve le fassent simultanément. Chaque étudiant ne peut se présenter qu'à une épreuve au plus chaque jour. Voici la liste des épreuves que doit passer chaque étudiant :

Dupont	Français, Anglais, Mécanique
Dupond	Dessin, Couture
Durand	Anglais, Solfège
Duval	Dessin, Couture, Mécanique
Duduche	Dessin, Solfège

1. Quel est le nombre maximal d'épreuves que l'on peut organiser le même jour ?
2. Quel est le nombre minimal de jours nécessaires à l'organisation de toutes les épreuves ?  
Pour répondre à ces questions, on cherchera des nombres particuliers associés à un graphe que l'on construira.

#### V- ALGORITHME DE ROY-WARSHALL : fermeture reflexo-transitive

Le problème, étant donné un graphe  $G = (X, U)$  de  $n$  sommets (indiqués de 1 à  $n$ ), est de déterminer la fermeture réflexo-transitive de  $G$  : le graphe  $\hat{G} = (X, \hat{U})$ ; rappelons que  $(x, y)$  est un arc de  $\hat{G}$  si et seulement si  $x = y$  ou bien s'il existe un chemin de  $x$  vers  $y$  dans  $G$ . Soit  $M = [m_{ij}]$  la matrice binaire associée à  $G$  (et  $\hat{M}$  pour  $\hat{G}$ )

On rend  $G$  réflexif par ajout d'une boucle en tout sommet n'en comportant pas : on suppose donc désormais que  $m_{ii} = 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Considérons l'opérateur  $\theta_r$  qui, appliqué à  $G$ , fournit le graphe  $\theta_r(G)$  : par définition  $\theta_r(G)$  comporte les arcs de  $U$  ainsi que tout arc  $(i, j)$  (si celui-ci n'appartenait pas à  $G$ ) tel qu'existent dans  $G$  les arcs  $(i, r)$  et  $(r, j)$ . Autrement dit,  $\theta_r$  enrichit  $G$  des arcs  $(i, j)$  (si ceux-ci n'existaient pas) tels qu'il existe un chemin de longueur deux de  $i$  vers  $j$  passant par  $r$ .

L'algorithme de ROY-WARSHALL consiste à :

- appliquer  $\theta_1$  à  $G$ , puis  $\theta_2$  à  $\theta_1(G)$ , puis  $\theta_3$  à  $\theta_2(\theta_1(G)) \dots$  puis  $\theta_n$  à  $\theta_{n-1}(\theta_{n-2} \dots \theta_1(G))$  ; le dernier graphe obtenu est  $\hat{G}$ .

1. Appliquer cet algorithme au graphe  $G$  ci-dessous, après avoir établi  $M$ .

